$\mathcal{F}$ = $f^{\wedge}$: Transformation de Fourier et produit de convolution

Soit : l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

où λ est la mesure de Lebesgue.

on note par :

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \text{mesurable} \;/\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

(Lebesgue L^p)

et on notera par :

$\|\cdot\|_p$ la norme d'Hölder sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p \geq 1$.

et si $p = \infty$, on notera par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Exple :

si $p = 1$:

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx$$

si $p = 2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition :

Soit f et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

on dit que f et g sont convolables si :

$\int_{\mathbb{R}} f(x) g(y-x) \, dx$ existe et finie

on l'appelle dans ce cas le produit de convolution de f et g et on le note par :

$$f * g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(y-x) \, dx$$

* **Proposition :**

Soit f et g deux fct convolable alors

$$f * g(x) = g * f(x)$$

* **Preuve :**

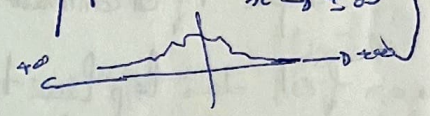
il suffit de faire un changement V,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) \, dt$$

$$x = x - t.$$

$C^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit $C_0(\mathbb{R}) = \{ f \text{ continue} \;/\; \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \}$



si $f \in C_0(\mathbb{R}) \Rightarrow \sup |f(x)| < +\infty$

[Npestune norme]

$$N_p(f * g) \leq N(f) * N(g)$$

$$N_p(f) = 0 \Rightarrow f = 0$$

~~Soit~~

* **Proposition :**

Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$

alors $f * g$ est définie.

(ou d'autre terme f et g sont convolable)

* **Preuve :** $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) \, dt$

si $f \in C_0(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est bornée sur $\mathbb{R}$

càd $M = \sup |f(x)| < +\infty$

$$\Rightarrow |f * g(x)| \leq M \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| \, dt$$

$$\int f(t) g(x+t) \, dt = \leq M \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, dx$$

$$< M . \|g\|_1 < +\infty$$

d'où f et g sont convolable.

Transformation de Fourier.

Définition :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On appelle transformation de Fourier l'opérateur :

$$F : L^1 \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$$

$$f \longrightarrow Ff(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi xt}\, dt.$$

$$= \hat{f}(x).$$

Cor de

$\lim_{x \to \pm\infty} Ff(x) = 0$: théorème de Riemann Lebesgue :

et que Ff est continue sur $\mathbb{R}$.

* on est dans le plan temporel
* Ff dans le plan Fréquentiel.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ f est paire (résultat réelle fourier)

$$Ff(x) = 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi xt) f(t)\, dt = F_c f(x))$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, impair

$$Ff(x) = 2i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi xt) f(t)\, dt \quad \text{(imaginaire résultat Ff)}$$

* **Proposition :**

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors on a :

$$F(f * g) = Ff(x) \cdot Fg(x).$$

Preuve :

$$F(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(t)\, e^{-2i\pi bx}\, dt.$$

$$(**) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(t-y)\, dy\, e^{-2i\pi xt}\, dt.$$

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(t-y)\, dy.$$

donc on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(y)\, g(t-y)\, e^{-2i\pi xt} \right| dy\, dt.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g(t-y)|\, dy\, dt.$$

or $|f(y)|\,|g(t-y)|$ est mesurable positive.

$\Rightarrow$ donc d'après Tonelli.

$$(*) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-y)|\, dt \right) |f(y)|\, dy.$$

donc on a $\int_{\mathbb{R}} |g(t-y)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx = \|g\|_1$

$(x = t-y) \quad |dx = dt$

or $g \in L^1 c(\mathbb{R}) \Rightarrow \|g\|_1 < +\infty$

$$(*) \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy.$$

$$= \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty$$

conclusion :

$$\iint |f(y)\, g(t-y)\, e^{-2i\pi xt}|\, dy\, dt < +\infty$$

d'où on peut appliquer th de Fubini dans la relation $(**)$

$$F(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(t-y)\, e^{-2i\pi xt}\, dy\, dt$$

soit le chgt : $x = t-y$, $t = x+y$

$dx = dt$.

$$= \iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} f(y)\, g(x)\, e^{-2i\pi x(x+y)}\, dy\, dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-2i\pi xy}\, dy \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-2i\pi xx}\, dx$$

$$= F(f)(x) \cdot F(g)(x)$$

mation de Fourier inverse :

Def : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$

on définit la transformation de Fourier inverse de f par $F^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{2i\pi xt}\, dt$

$= Ff(-x)$

$= \overset{\vee}{F} f(x)$.

Propriété :

Soit $f \in L^1$ tq $Ff \in L^1$.

1) $F(Ff)(x) = F \circ Ff(x)$.

$= f(-x)$

$= f(x)$

2) $F \circ F^{-1} f(x) = f(x)$

$= F^{-1} \circ Ff(x)$.

Théorème de Parseval :

Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors on a :

1) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} Ff(x)\, \overline{Fg(x)}\, dx$.

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, Fg(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} Ff(x)\, g(x)\, dx$.

Théorème de Plancherel :

pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a :

$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx$.

$= \|Ff\|_2^2$.

Propriété :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

et $\tau_a f(y) = f(y-a)$

1) $F(\tau_a f)(x) =$

$\downarrow$

$e_{-a} Ff$.

2) $F(f(at))(x) =$

Proposition :

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $f \in C^m(\mathbb{R})$

et $f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$

$F(f^{(m)})(x) = (2i\pi x)^m Ff(x)$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $t \to t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$

alors on a $F^{(n)}(f)(x) = (-2i\pi)^n F(t^n f(t))(x)$

Exercices :

1). soit $f_a(x) = e^{-ax^2}$. / $\int e^{-at^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (on admet)

a - Mq $f_a \in L^1(\mathbb{R})$; $a > 0$

b) - Retrouver une équation différentielle vérifiée par f de première ordre, notée (E)

b) - Retrouver l'équation différentielle vérifiée par Ff notée $(\overset{\vee}{E})$.

c) - Retrouver Ff ?

2) - Soit $U(x) = e^{-\pi x^2}$

et $V(x) = \pi x\, e^{-\pi x^2}$

Montrer que U et V sont deux vecteurs propres associés aux valeurs propres à préciser pour l'opérateur F.

Correction :

1) a) - $\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\, dt$.

$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} < +\infty$

b) - on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = -2ax\, e^{-ax^2}$

$= -2ax\, f_a(x)$

$= b(E) : f_a'(x) + 2ax\, f_a(x) = 0$

c) On appliquant l'opérateur F à l'équa (E) on obtient

$$F(f_a')(x) + 2a\, F(t f(t))(x) = F(0) = 0.$$

$$F(f^{(n)})(x) = (2i\pi x)^n \, Ff(n)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} Ff(x) = F((-t)^n f)(x) = (-2i\pi)^n F(t^n f(t))(x).$$

$$= 2i\pi x\, Ff(x) + \frac{2a}{-2i\pi} F(f')(x) = 0.$$

$$= (E): F'(f)(x) + \frac{2\pi^2}{a} x\, Ff(x) = 0.$$

$$y'(x) + \beta(x) y(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\beta(x).$$

appliq $\int$.

$$\Rightarrow \ln(y(x)) = -\int \beta(x)\, dx + c.$$

En appliquant expo.

$$y(x) = \lambda e^{-\int \beta(x)}.$$

Donc : $\dfrac{F'f(x)}{Ff(x)} = \dfrac{-2\pi^2 x}{a}$

$$\Rightarrow Ff(x) = \lambda e^{-\frac{\pi^2}{a} x^2}$$

or on a : $Ff(0) = 1$.

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi 0 t} f(t)\, dt.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ (donnée)}$$

d'où $F(f_a(x)) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} x^2}$ (*)

soit $U(x) = e^{-\pi x^2}$.

$F(U)(x) = ?? \; \lambda\, U(x)$

on a $F(e^{-\pi t^2})(x) = e^{-\pi x^2}$ pour $a = \pi$ dans (*)

$(f_a(x) = e^{-a x^2})$

donc $U(x) = e^{-\pi x^2}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ par l'opérateur F.

$$V(x) = \pi x\, e^{-\pi x^2} = -\frac{1}{2} U'(x)$$

$$F(V)(x) = \frac{-1}{2} F(U')(x)$$

$$= \frac{-2i\pi x}{2} F(U)(x)$$

$$= -i\, \underbrace{\pi x\, e^{-\pi x^2}}_{V(x)}.$$

donc V est un VP associé le valeur propre $-i$ pour l'opérateur F.

Exercice 2

1) - soit $f(x) = e^{-ax} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ $a > 0$.

a) Mq $f \in L^1(\mathbb{R})$

b) calculer Ff.

2) - Retrouver Fg où $g(x) = \dfrac{x^k}{k!} e^{-ax} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

1) a - $f(x) = e^{-ax} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a} < +\infty$$

D'où $f \in L^1(\mathbb{R})$.

b) $Ff(x) = \int_0^{+\infty} e^{-dt} e^{-2i\pi x t}\, dt$

$$= \frac{1}{a + 2i\pi x}.$$

2) - $Fg(x) = \dfrac{1}{k!} F(t^k f(t))(x)$.

$\mathcal{F}(t^n f(t)) = \dfrac{1}{(-2\pi i)^n} F^{(n)} f(x)$

$$= \frac{1}{k!} \times \frac{1}{(-2i\pi)^k} F^{(k)}(f)(x)$$

or $\dfrac{d^k}{dx^k}\left(\dfrac{1}{2i\pi x + a}\right) = \dfrac{(-1)^k (2i\pi)^k k!}{(2i\pi x + a)^{k+1}}$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-a)^n (n-1)!}{(ax+b)^{n+1}}$$

Donc $Fg(x) = \dfrac{1}{k!} \dfrac{(-1)^k (2i\pi)^k k!}{(2i\pi x + a)^{k+1}}$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $\mathcal{F}f(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

calculer Fg et Fh ou $g(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$ $\quad$ et $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

$g(x) = \frac{1}{x^2-2x+2} = f(x-1)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(f(x-1))(x) = e^{-2i\pi x} \mathcal{F}f(x)$

$= e^{-2i\pi x} \pi e^{-2\pi|x|}$.

$= \pi e^{-2\pi(|x| + ix)}$.

$\Rightarrow h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow h'(x) = -2h(x)$

$\Rightarrow h(x) = \frac{-1}{2} f'(x)$

$\mathcal{F}h(x) = \frac{-1}{2} \mathcal{F}(f'(x))$.

$= \frac{-1}{2}(2i\pi x)\, \mathcal{F}(f'(x))$

$= -i\pi x\, \mathcal{F}(f'(x))$

$= -i\pi x\, e^{-2\pi x}$

Exo 9 :

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ et $g(x) = \sin(\pi x)\, e^{-\pi x^2}$

1) a) Soit $\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que $\mathcal{F}(\chi)(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, $x > 0$

b) Calculer $\mathcal{F}f$ et déduire la valeur $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 dx$.

2) Calculer $\mathcal{F}(g)$

sachant que $\mathcal{F}(\pi t\, e^{-\pi t^2})(x) = -i\pi x\, e^{-\pi x^2}$.

$\mathcal{F}(\chi)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi x t}\, dt$

$= \frac{-1}{i2\pi x} \left[e^{-2i\pi x t} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$.

$= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

$2) \int \mathcal{F}(\chi)(x) = f(x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}f(x) = \chi(-x)$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$.

d'après la formule d'inversion.

Soit $I = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$.

$= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\chi)(x)|^2 dx$.

$= \int_{\mathbb{R}} \chi^2(x)\, dx$.

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi^2(x)\, dx = 1$.

$3) g(x) = \sin(\pi x)\, e^{-\pi x^2}$

$= \frac{1}{2i} e^{i\pi x} e^{-\pi x^2} - \frac{1}{2i} e^{-i\pi x} e^{-\pi x^2}$

on a $\mathcal{F}(e^{iat} f(t))(x) = \mathcal{F}f\left(x - \frac{a}{2\pi}\right)$

$\mathcal{F}g(x) = \frac{1}{2i} \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2i} \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d'autre part, on a :

$\mathcal{F}(\pi t\, e^{-\pi t^2})(x) = \frac{-1}{2} \mathcal{F}\left(\left(e^{-\pi t^2}\right)'\right)(x)$

$= \frac{-1}{2} 2i\pi x\, \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(x)$

$= -i\pi x\, e^{-\pi x^2}$.

$\Rightarrow \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(x) = e^{-\pi x^2}$

$\mathcal{F}g(x) = \frac{1}{2i} e^{-i\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2i} e^{i\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

et produit de convolution.

$f(x)*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\,dt = \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\pi x t}\,dt$

Exercice

1) Calculer la transformation de Fourier de :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

2) En déduire l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}_c f(x)$.

$= 2\int_0^1 \cos(2\pi x t)(1-t^2)\,dt.$

$u = 1-t^2 \to u' = -2t.$

$v' = \cos(2\pi x t) \to v = \frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi x t).$

$= \left[-\frac{(1-t)^2}{\pi x}\sin(2\pi x t)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi x}\int_0^1 t\sin(2\pi x t)\,dt.$

I.P.P. $u = t \to u' = 1$

$v' = \sin(2\pi x t) \to v = -\frac{1}{2\pi x}\cos(2\pi x t).$

$= \frac{2}{\pi x}\left\{\left[-\frac{t}{2\pi x}\cos(2\pi x t)\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{2\pi x}\int_0^1 \cos(2\pi x t)\,dt\right\}.$

$= -\frac{1}{(\pi x)^2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{(\pi x)^2}\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}.$

$\Rightarrow \mathcal{F}f(x) = -\frac{\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{1}{2(\pi x)^3}\sin(2\pi x).$

$2\int I = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx.$

$g(x) = \mathcal{F}f(x).$

$= -\frac{\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{1}{2(\pi x)^3}\sin(2\pi x).$

est paire donc.

Q) $\mathcal{F}(g)(x) = \mathcal{F}_c\, g(x)$

$= 2\int_0^{+\infty} g(t)\cos(2\pi x t)\,dt.$

d'une part, et d'autre part d'après la formule d'inverse.

$\mathcal{F}g(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x).$

$= f(x) - f(-x) = f(x)$. car f est paire

donc :

$\mathcal{F}g(x) = 2\int_0^{+\infty}\left\{-\frac{\cos(2\pi t)}{(\pi t)^2} + \frac{1}{2(\pi t)^3}\sin(2\pi t)\right\}\cos(2\pi x t)\,dt.$

soit le CV :

$y = 2\pi t.$

$\Rightarrow dy = 2\pi\,dt \to dt = \frac{dy}{\pi}$

$t = \frac{y}{2\pi}$

$\to \mathcal{F}g(x) = -2\int_0^{+\infty}\left\{\frac{\cos(y)}{\left(\frac{y}{2}\right)^2} - \frac{1}{2\left(\frac{y}{2}\right)^3}\sin(y)\right\}\cos(yx)\frac{dy}{2\pi}.$

$\mathcal{F}g(x) = -\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\cos(y) - \sin(y)}{y^3}\cos(yx)\,dy.$

$\Rightarrow$ En particulier pour $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\mathcal{F}g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{\pi}I = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow I = -\frac{3\pi}{16}$

Exercice :

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.

$\int \left(\frac{a}{1+x} + \frac{b}{2+x}\right) f$.

$(1+x) f = a + \frac{(1+x)b}{2+x} \Big| x = -1$.

sont :

$g(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{(p+ia)^2(p-ia)^2}$.

cherche l'origine de g par la transformée de Fourier.

$g(p) = \frac{a_1}{p+ia} + \frac{a_2}{(p+ia)^2} + \frac{a_3}{p-ia} + \frac{a_4}{(p-ia)^2}$

$(p+ia)^2 g(p)\big|_{p=-ia} = a_2 = -\frac{1}{4a^2}$.

$(p-ia)^2 g(p)\big|_{p=ia} = a_4 = \frac{-1}{4a^2}$

$\lim_{p \to +\infty} p\, g(p) = 0 = a_1 + a_3 \Rightarrow a_1 = -a_3$

$\mathcal{L}^{-1} g(0) = \frac{1}{a^4} = \frac{a_1}{ia} - \frac{a_2}{a^2} - \frac{a_3}{ia} - \frac{a_4}{a^2}$.

$= \frac{2a_1}{ia} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^4}$.

$\Rightarrow a_1 = \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{2a^2}\right)\frac{ia}{2} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{2a}\right)$.

donc $a_3 = -a_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{2a}\right)$.

$g(p) = \frac{1}{p^2+a^2} \cdot \frac{1}{p^2+a^2}$.

$= \frac{1}{a^2} \mathcal{L}(H(t)\sin(at))(p)\, \mathcal{L}(H(t)\sin(at))(p)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(f*g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\, \mathcal{L}(g)(p)$.

$= \frac{1}{a^2} \mathcal{L}((H(\cdot)\sin(a\cdot)) * (H(\cdot)\sin(a\cdot)))(t)(p)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(g)(t) = (H(\cdot)\sin(a\cdot) * (H(\cdot)\sin(a\cdot)))(t)$.

$= \int_{\mathbb{R}} H(x)\sin(ax)\, H(t-x)\sin(a(t-x))\, dx$.

or $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$H(t-x) = \begin{cases} 1 & t-x \geq 0 \Rightarrow x \leq t \\ 0 & t-x < 0. \end{cases}$

$\mathcal{L}^{-1} g(t) = \int_0^{+\infty} \sin(ax)\, H(t-x)\sin(a(t-x))\, dx$.

$= \int_0^t \sin(ax)\sin(a(t-x))\, dx$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin b \sin a$.

$\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} = \sin a \sin b$.

sraieb.machin@yahoo.fr.

1 L'espace L^p

Définition Soit p un nombre réel positif. On désigne par l'éspace des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable, l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$ et on le note par
$\mathcal{L}^p_\mu = \{f : E \to \mathbb{C},\ f \text{ mesurable et } \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$.
On introduit pour $f \in \mathcal{L}^p_\mu$ le nombre $\|f\|_p$, $p \geq 1$ comme suit

$$\|f\|_p = \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{1/p}.$$

Pour $p,\ q \in]1, \infty[$, ils sont dites exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Par extension, p tend vers ∞ si et seulement si q tend vers 1 et l'inverse est juste.
On convient alors que 1 et $+\infty$ sont aussi des exposants conjugués.
Proposition :
Pour $1 \leq p < +\infty$ on a pour toutes fonctions mesurables f et g de E dans $\mathbb{C}$

1) $\int_E |fg| d\mu \leq \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_E |f|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Inégalité de Holder)
(Pour $p = q = 2$, l'inégalité est appelé inégalité de Cauchy Schwartz.)

2) $\Big(\int_E |f+g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$ (Inégalité de Minkovski.)

Preuve
1) En utilisant l'inégalité de concavité de la fonction ln, on obtient aisement

$$\forall\, x,\ y > 0,\ \ln(xy) = \frac{\ln(x^p)}{p} + \frac{\ln(y^q)}{q} \leq \ln(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q})$$

Il suffit ensuite de passer à l'exponentielle pour retrouver que $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Ensuite le résultat découlera en remplacant x et y par des fonctions $\frac{|f|}{\|f\|_p}$ et $\frac{|g|}{\|g\|_q}$ et en integrant l'inégalité obtenue.
La concavité du Logarithme étant stricte, on ne peut avoir égalité que si

$$\|g\|_q^q |f(x)|^p = \|f\|_p^p |g(x)|^q \ \mu - p.p$$

2) Si $N_p(f) = +\infty$ ou que $g(x) = +\infty$, l'inégalité est vérifiée.
On peut supposer que $N_p(f) < +\infty$ et que $N_(g) < +\infty$. On rappelle l'inégalité triangulaire, pout tout $f,\ g$

$$|f+g|^p \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1},$$

et c'est du fait que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$. En integrant et en utilisant l'inégalité de Holder 1) et tout en remarquant que $pq - q = p$, on aura :

$$\begin{aligned}\int_E |f+g|^p d\mu &\leq \int_E |f+g|^{p-1}|f| d\mu + \int_E |f+g|^{p-1}|g| d\mu \\ &= \|f+g\|_p^{p-1}\|f\|_p + \|f+g\|_p^{p-1}\|g\|_p\end{aligned}$$

Le résultat découle en multipliant l'inégalité par $\|f+g\|_p^{1-p}$.

L'égalité est réalisé lorsqu'on ait $\|g\|_p |f(x)| = \|f\|_p |g(x)|$.

1 L'espace L^p

Définition Soit p un nombre réel positif. On désigne par l'éspace des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable, l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$ et on le note par
$\mathcal{L}^p_\mu = \{f : E \to \mathbb{C},\ f \text{ mesurable et } \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$.
On introduit pour $f \in \mathcal{L}^p_\mu$ le nombre $\|f\|_p$, $p \geq 1$ comme suit

$$\|f\|_p = \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{1/p}.$$

Pour $p,\ q \in]1, \infty[$, ils sont dites exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Par extension, p tend vers ∞ si et seulement si q tend vers 1 et l'inverse est juste.
On convient alors que 1 et $+\infty$ sont aussi des exposants conjugués.
Proposition :
Pour $1 \leq p < +\infty$ on a pour toutes fonctions mesurables f et g de E dans $\mathbb{C}$

1) $\int_E |fg| d\mu \leq \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_E |f|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Inégalité de Holder)
(Pour $p = q = 2$, l'inégalité est appelé inégalité de Cauchy Schwartz.)

2) $\Big(\int_E |f+g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$ (Inégalité de Minkovski.)

Preuve

1) En utilisant l'inégalité de concavité de la fonction ln, on obtient aisement

$$\forall\, x,\ y > 0,\ \ln(xy) = \frac{\ln(x^p)}{p} + \frac{\ln(y^q)}{q} \leq \ln(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q})$$

Il suffit ensuite de passer à l'exponentielle pour retrouver que $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Ensuite le résultat découlera en remplacant x et y par des fonctions $\frac{|f|}{\|f\|_p}$ et $\frac{|g|}{\|g\|_q}$ et en integrant l'inégalité obtenue.
La concavité du Logarithme étant stricte, on ne peut avoir égalité que si

$$\|g\|_q^q |f(x)|^p = \|f\|_p^p |g(x)|^q \ \mu - p.p$$

2) Si $N_p(f) = +\infty$ ou que $g(x) = +\infty$, l'inégalité est vérifiée.
On peut supposer que $N_p(f) < +\infty$ et que $N_(g) < +\infty$. On rappelle l'inégalité triangulaire, pout tout $f,\ g$

$$|f+g|^p \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1},$$

et c'est du fait que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$. En integrant et en utilisant l'inégalité de Holder 1) et tout en remarquant que $pq - q = p$, on aura :

$$\begin{aligned}\int_E |f+g|^p d\mu &\leq \int_E |f+g|^{p-1}|f| d\mu + \int_E |f+g|^{p-1}|g| d\mu \\ &= \|f+g\|_p^{p-1}\|f\|_p + \|f+g\|_p^{p-1}\|g\|_p\end{aligned}$$

Le résultat découle en multipliant l'inégalité par $\|f+g\|_p^{1-p}$.

L'égalité est réalisé lorsqu'on ait $\|g\|_p |f(x)| = \|f\|_p |g(x)|$.

Proposition
Pour tout $p > 0$ on a

1. l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$ est un espace vectoriel.
2. l'application $N_p : \mathcal{L}^p_\mu \to [0, +\infty[,\ f \mapsto \|f\|_p$ est un semi norme, c'est à dire que l'on a pour tout f et g dans $\mathcal{L}^p_\mu$
   — $N_p(f) \geq 0$,
   — $N_p(\lambda f) = |\lambda| N_p(f)$
   — $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

D'autre part, on a $N_p(f) = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0\ p.p$ càd $f = 0\ p.p$.

Preuve

1. — En effet, pour tout $f \in \mathcal{L}^p_\mu$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$), on a $\alpha f \in \mathcal{L}^p_\mu$.
   — Pour tout $f,\ g \in \mathcal{L}^p_\mu$, on a d'après l'inégalité de Minkowski

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p d\mu \leq (\int_E |f(x)|^p d\mu + \int_E |g(x)|^p d\mu) < +\infty.$$

   Ce qui explique que $f + g \in \mathcal{L}^p_\mu$.
2. — $N_p(|f|) = N_p(f)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) on a $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$.
   — $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$. (C'est le résultat de l'inégalité de Minkowski)

Nous introduirons par la suite la notion de convergence dans l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$.

Définition
Considérons la relation d'equivalence sur l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g\ p.p$$

La classe d'équivalence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p_\mu$ est noté par $\dot{f}$ et définie comme suit :
$\dot{f} = \{g \in \mathcal{L}^p_\mu,\ \ f = g\ p.p\}$.
L'ensemble des classe d'équivalence est l'espace quotient, définit comme suit :
$L^p_\mu := \mathcal{L}^p_\mu / \sim$.

1.1 Produit de convolution

Définition
La translatée (ou la translation) d'une fonction f par le nombre réel a est définie comme suit :

$$\tau_a f(x) = f(x-a).$$

Et on a les résultats suivantes :

1. Si $f \in L^p_\mu,\ \ 1 \leq p \leq +\infty$, alors $\tau_a f \in L^p_\mu$ et $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.
2. Si $f \in L^p_\mu,\ \ 1 \leq p < +\infty$, alors $\lim_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$.

Définition
Soient f et g deux fonctions de L^1_μ. On appelle produit de convolution de f et de g noté $f * g$, l'applicaion h de L^1_μ défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) d\mu(t).$$

Sur l'espace L^1_μ le produit de convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.
Et on a pour tout $f,\ g \in L^1_\mu$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Preuve
En vertue du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \|f*g\|_1 &\leq \int\int \Big|f(x-t)g(t)\Big| d\mu(t)d\mu(x) \\ &\leq \int |g(t)| \Big(\int |f(x-t)| d\mu(x)\Big) d\mu(t) = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

En vertue d'un changement de variable $s = x - t$, on obtient facilement que $f * g = g * f$.
D'autre part, en vertue du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} ((f*g)*h)(x) &= \int\int f(x-t-s)g(s)h(t)dsdt \\ &= \int\int f(x-s-t)g(t)h(s)dsdt \\ &= ((f*h)*g)(x) \end{aligned}$$

Et grace à la commutativité on obtient

$$\begin{aligned} (f*g)*h &= (f*h)*g = (h*f)*g \\ &= (h*g)*f = f*(g*h) \end{aligned}$$

D'où l'associativité du produit de convolution.

2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{L}^1$

Définition
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformation de Fourier de la fonction f, l'application $\mathcal{F}f$ ou $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$à valeur dans $\mathbb{C}$, par

$$\mathcal{F}f(x) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt}dt,\ x,\ t \in \mathbb{R}$$

Théorème de Riemann-Lebesgue
L'application

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$$

est lineaire et continue et pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a :

1. $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \widehat{f}(x) = 0$. (Lemme de Riemann Lebesgue.)

(Cas particulier :)
on a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Donc l'intégrale de Fourier s'Ã©crit :

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos(2\pi tx) - i\sin(2\pi tx))\ dt$$

si f est paire, alors $\mathcal{F}f(x)$ est un nombre réel et on a

$$\mathcal{F}f(x) = 2\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(2\pi tx)\ dt.$$

et si f est impaire, alors $\mathcal{F}f(x)$ est imaginaire et on a

$$\mathcal{F}f(x) = -2i\int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(2\pi tx)\ dt.$$

Exercice. 1. *Calculons la transformee de Fourier de*

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1-|t| & si\ \ |t| \leq 1. \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Réponse

comme Δ est paire, on pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(x) &= 2\int_0^1 (1-t)\ \cos(2\pi xt)\ dt \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} \end{aligned}$$

si $x = 0$, $\widehat{\Delta}(0) = 1$. La fonction $\widehat{\Delta}(x)$ est donc prolongeable par continuitéen 0. Donc

$$\widehat{\Delta}(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$

Proposition

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$, et $b \in \mathbb{R}$ On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. $\mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{x}{a}),\ \ a \neq 0.$
2. $\mathcal{F}(\tau_b f)(x) = e^{-2i\pi bx}\mathcal{F}f(x).$
3. $\mathcal{F}(e^{2i\pi bt}f(t))(x) = \mathcal{F}f(x-b).$
4. $\mathcal{F}(\overline{f})(x) = \overline{\mathcal{F}f}(-x).$

Preuve

1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$, alors, on a d'une part la fonction $t \to f(at) \in L^1(\mathbb{R})$ et d'autre part , par changement de variable $u = at$, on aura que si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \mathcal{F}(f(at))(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f(ta)dt = \frac{1}{a^n}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\frac{u}{a}} f(u)du$$

et si $a \in \mathbb{R}_-^*$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{-1}{a}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\frac{u}{a}} f(u)du.$$

Ce qui entraine que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ a \in \mathbb{R}^*,\ \ \mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{x}{a}).$$

2. On a avec le changement de variable $u = t - b$ on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_b f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f(t-b)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(u+b)} f(u)du \\ &= e^{-2i\pi xb}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xu} f(u)du = e^{-2i\pi bx}\mathcal{F}f(x). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{2i\pi bt}f(t))(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi bt}e^{-2i\pi xt}f(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t(x-b)}f(t)dt \\ &= \mathcal{F}f(x-b).\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\overline{f})(x) &= \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt}\overline{f}(t)dt} \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi t}f(t)dt} \\ &= \overline{\mathcal{F}f}(-x).\end{aligned}$$

Proposition
Pour $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f\ \mathcal{F}g.$$

preuve Comme $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ et on a, en vertue du théorème de Tonelli, la fonction

$$(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)e^{-2i\pi xy}| = |f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ce qui entraine d'après théorème de Fubini et d'un changement de variable $u = y - t$ que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yx}(f*g)(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yx}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(y-t)g(t)dt\Big)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(u+tx)}f(u)du\Big)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux}f(u)du \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx}g(t)dt \\ &= \mathcal{F}f(x)\mathcal{F}g(x).\end{aligned}$$

Proposition
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec f et f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, on a

$$\mathcal{F}(f'(t)(x) = (2i\pi x)\mathcal{F}f(x)$$

Plus généralement, on a :
Pour f dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que f est de classe $C^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^{(k)}$ dans $L^1(\mathbb{R}), \forall\ k \in \mathbb{N}$, alors on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(x) = (2i\pi x)^k\mathcal{F}(f)(x).$$

Proposition
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, alors $\mathcal{F}f$ est n-fois dérivable et on a

$$\mathcal{F}^{(k)}f(x) = (-2i\pi)^k\mathcal{F}(t^k f(t))(x),\ \forall\ 0 \le k \le n.$$

Solution :
on a

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-2i\pi tx}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t(a+2i\pi x)}dt \\ &= \frac{1}{a+2i\pi x}\end{aligned}$$

2. remarquons que $g(t) = f(-t)$, alors

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{a-2i\pi x}$$

3. Comme $h(t) = f(t) + g(t)$, alors

$$\widehat{h}(x) = \frac{1}{a+2i\pi x} + \frac{1}{a-2i\pi x} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}$$

4. le fait que h et $\widehat{h}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, de plus h est continue sur $\mathbb{R}$, on a avec la formule d'inversion de Fourier on a

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(t)e^{2i\pi tx}dt$$

en particulier le cas $x = 0$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+4\pi^2t^2}dt = \frac{1}{2a}h(0) = \frac{1}{2a}$$

Exercice. 4. *Soit f la fonction définie par $f(x) = x1_{[-1,1]}(x)$. Calculer la transformation de Fourier $\hat{f}$ de f.*

Solution : on sait que $\mathcal{F}(1_{[-1,1]}(t))(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t1_{[-1,1]}(t))(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}'(1_{[-1,1]}(t))(x) \\ &= -\frac{1}{2i\pi}\left(\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right)'\end{aligned}$$

Exercice. 5. *Soit $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1+t & si \ \ t \in [-1,0], \\ 1-t & si \ \ t \in [0,1], \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Faire la representation graphique de la fonction Δ.*
2. *Calculer la transformation de Fourier $\widehat{\Delta}(x)$ de Δ.*
3. *En déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}dx$$

Solution : on sait que $\widehat{\Delta}(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$ la fonction Δ est paire et carré intégrable, la formule de Plancherel implique

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} = \pi \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{\pi}{3}$$

Exercice. 6. *Soit $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{t^k}{k!} e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t)$$

En utilisant le résultat de l'exercice 1, calculer $\hat{f}$.

Solution : D'apres l'exercice 1 on a

$$\mathcal{F}\left(e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t)\right)(x) = \frac{1}{a + 2i\pi x}$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}\left(\frac{t^k}{k!} e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t)\right)(x) = \frac{1}{(-2i\pi)^k k!} \left(\frac{1}{a+2i\pi x}\right)^{(k)}$$

un calcul simple montre que

$$\left(\frac{1}{a+2i\pi x}\right)^{(k)} = (-1)^k k! (2i\pi)^k \frac{1}{(a+2i\pi x)^{k+1}}$$

d'où

$$\mathcal{F}\left(\frac{t^k}{k!} e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t)\right)(x) = \frac{1}{(a+2i\pi x)^{k+1}}$$

Exercice. 7. *Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-|t|}$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction f.*
2. *en déduire la transformée de Fourier de*

$$h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}.$$

3. *En déduire, pour $\omega \in \mathbb{R}$, la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\, dx$$

4. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction φ définie par*

$$\varphi : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$$

Solution :

1. on a

$$\widehat{f}(x) = \frac{2}{1+4\pi^2 x^2}$$

2. $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, f est paire avec la formule d'inversion de Fourier on a

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\left(\frac{-x}{2\pi}\right)$$

ce qui implique

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1+t^2}\Big) = \pi e^{-2\pi|x|}$$

3. comme h est paire

$$\begin{aligned}\pi e^{-2\pi|x|} = \widehat{h}(x) &= 2\int_0^{+\infty} h(t)\cos(2\pi tx)dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\cos(2\pi tx)dt \\ &\quad pour \omega = 2\pi x \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

alors,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}$$

Exercice. 8. *On donne la transformation de Fourier de la fonction* $f(x) = e^{-x^2/2}$,

$$\mathcal{F}(e^{-x^2/2})(\alpha) = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\alpha^2}$$

1. *Déterminer la transformée de Fourier de* $g(x) = e^{-ax^2}$
2. *Peut-on trouver une fonction* $h : \mathbb{R} \to R$ *telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-u)h(u)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$$

Solution :

1. on a

$$g(x) = f(\sqrt{2a}x)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g(t))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2a}}\ \widehat{f}(\frac{x}{\sqrt{2a}}) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\frac{\pi^2}{a}x^2}\end{aligned}$$

2. en fonction du produit de convolution l'equation s'ecrit sous la forme

$$(h * h)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$$

appliquant la transformation de Fourier au deux membre de l'equation on obtient :

$$\Big(\widehat{h}(x)\Big)^2 = \Big(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-\frac{\pi^2}{2}x^2}\Big)^2 = (\mathcal{F}(e^{-2t^2})(x))^2$$

avec l'injectivite de la transformation de Fourier on obtient

$$h(t) = e^{-2t^2}$$

Exercice. 9. *Le but de cet exercice est de chercher des fonctions φ absolument intégrables et bornées vérifiant pour tout x réel,*

$$\varphi(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$ Déterminer une solution pour $\beta < \frac{1}{2}$.

Solution :
En posant $f(x) = e^{-|x|}$, il est évident que l'équation peut s'écrire

$$\varphi = f + \beta\varphi * f.$$

Soit $\beta < \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une solution φ absolument intégrable. En appliquant la transformation de Fourier, il vient

$$\hat{\varphi} = \hat{f} + \beta\hat{\varphi}\hat{f}.$$

soit encore $\hat{\varphi} = \frac{\hat{f}}{1-\beta\hat{f}}$, or $\hat{f}(x) = \frac{2}{1+x^2}$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(x) &= \frac{2}{1-2\beta+x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} \frac{2\sqrt{1-2\beta}}{(1-2\beta)+x^2}, \quad \text{pour tout } \beta < \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} \hat{h}(x) \quad \text{pour} \quad h(t) = e^{\sqrt{1-2\beta}|t|}
\end{aligned}$$

Si on suppose en plus que φ est continue, alors par la formule d'inversion, on en déduit que

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} e^{\sqrt{1-2\beta}|t|}$$

Bonne lecture !

Transformation de Laplace.

causale nulle sur $\mathbb{R}_-^*$
continue local intégrable.

Notation :

on notera par :

$\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$: l'espace des fonctions mesurables localement intégrables :

c.a.d :

$$\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) = \left\{ f \text{ mesurable} \,/\, \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty,\ a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

f : fonction localement intégrable.

Définition :

Soit f une fonction. on dit que f est causale si $f(x)=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

- si f n'est pas causale, on peut construire :

$$g(x) = f(x)\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

et comme ça on aura que g est causale.

Définition : soit f une fonction causale.

$\{$ c.à.d $f(x)=0,\ \forall x<0\}$.

on définit la transformation de la place de f :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \qquad p \in \mathbb{C}$$

lorsque $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ converge.

(ou bien lorsque $t \longrightarrow e^{-pt} f(t)$ intégrable.

on a : $|e^{-pt} f(t)| = |e^{-\mathrm{Re}(p)t} \cdot e^{-i\,\mathrm{Im}(p)t} \cdot f(t)|$

$= e^{-t\mathrm{Re}(p)} |f(t)|$

donc $e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow e^{-t\mathrm{Re}(p)} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Définition :

soit f une fonction causale on appelle abscisse de convergence le réel

$$p_0 = \inf \left\{ p \in \mathbb{R}_+ \,/\, e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

(le plus petit p tel que $\int$ soit intégrable finie)

Exercice :

Soit $H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ $x \in \mathbb{R}$.

et $f(x) = x^n H(x)$

$g(x) = e^{iax} H(x)$

1) calculer l'abscisse de convergence de f et g.

2) calculer leurs transformation de Laplace respective

$\Rightarrow$ on appelle $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$

3) on déduire $\mathcal{L}(\cos(ax)H(x))(p)$ et $\mathcal{L}(\sin(ax)H(x))(p)$ (exige = fausse ?)

Correction

① - on a : $e^{-pt} f(t) = e^{-pt} t^n H(t) \in L^1(\mathbb{R}$?

on a $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n H(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n\,dt$.

soit $y = pt \Rightarrow t = \frac{y}{p}$. $dt = \frac{dy}{p}$.

$$= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{p}\right)^n dy$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}} \Gamma(n+1) < \infty \quad \begin{matrix} n+1>0 \\ n>-1 \end{matrix}$$

$= \mathcal{L}(f)(p)$.

d'où l'abscisse de convergence de f est $p_0 = -1$.

Conclusion :

$$\mathcal{L}(x^n H(x))(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}.$$

Transformation de Laplace.

causale nulle sur $\mathbb{R}_-^*$
continue local intégrable.

Notations :

on notera par :

$\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions mesurables localement intégrables.

c.à.d :

$$\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) = \left\{ f \text{ mesurable} / \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty, a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

f fonction localement intégrable.

Définition :

Soit f une fonction. on dit que f est causale si $f(x)=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

- si f n'est pas causale, on peut construire :

$$g(x) = f(x)\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

et comme ça on aura que g est causale.

Définition : soit f une fonction causale

(c.à.d $f(x)=0$, $\forall x<0$).

on définit la transformation de la place de f :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \qquad p \in \mathbb{C}$$

lorsque $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ converge.

(ou bien lorsque $t \longmapsto e^{-pt} f(t)$ intégrable.

on a $|e^{-p} f(t)| = |e^{-\mathrm{Re}(p)t} \cdot e^{-i\,\mathrm{Im}(p)t} \cdot f(t)|$

$= e^{+\mathrm{Re}(p)} |f(t)|$

donc $e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow e^{-\mathrm{Re}(p)} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Définition :

soit f une fonction causale on appelle abscisse de convergence le réel

$$p_0 = \inf \left\{ p \in \mathbb{R}_+ / e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$$

(le plus petit p tel que $\int$ son intégrale finie)

Exercice :

Soit $H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ $x \in \mathbb{R}$.

et $f(x) = x^n H(x)$

$g(x) = e^{\lambda x} H(x)$

1) calculer l'abscisse de convergence de f et g.

2) calculer leurs transformation de Laplace respective

$\Rightarrow$ on rappelle $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$

3) on déduire $\mathcal{L}(\cos(ax)H(x))(p)$ et $\mathcal{L}(\sin(ax)H(x))(p)$

cl/ge = fonction $< \infty$

Correction

① - on a : $e^{-pt} f(t) = e^{-pt} t^n H(t) \in L^1(\mathbb{R})$?

on a $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n H(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n\,dt$.

soit $y = pt \Rightarrow t = \frac{y}{p}$. $dt = \frac{dy}{p}$.

$$= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{p}\right)^n dy.$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,dy.$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}} \Gamma(n+1) < \infty \quad \begin{matrix} n+1>0 \\ n>-1 \end{matrix}.$$

$= \mathcal{L}(f)(p)$.

d'où l'abscisse de convergence de f est $p_0 = -1$.

Conclusion :

$$\mathcal{L}(x^n H(x))(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \qquad n>-1$$

② - Soit $g(x) = e^{iax} H(x)$

$$\int_0^{+\infty} g(x) e^{-px}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{iax} e^{-px}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{x(ia-p)}\,dx.$$

on a :

$$\left|e^{x(ia-p)}\right| = \left|e^{iax} e^{-px}\right|$$

$$= \left|e^{-x\,\mathrm{Re}\,p} \cdot e^{i(ax - \mathrm{Im}\,p)}\right|$$

$$= e^{-x\,\mathrm{Re}\,p} \in L^1(\mathbb{R}).$$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\,p > 0.$

③ -

d'où l'abscisse de convergence :

$p_0 = 0$

on a $\mathcal{L}\left(e^{iax} H(x)\right)(p)$.

$$= \int_0^{+\infty} e^{iax} e^{-p}\,dt.$$

$$= \frac{1}{ia-p} \left[e^{x(ia-p)}\right]_0^{+\infty}.$$

$$= \frac{1}{p-ia} = \frac{p+ia}{p^2+a^2} = \frac{p}{p^2+a^2} + i\frac{a}{p^2+a^2},$$

et d'autre part on a :

$$\mathcal{L}\left(e^{iax} H(x)\right)(p) = \mathcal{L}\left(\cos(ax) H(x)\right)(p)$$

d'où $\mathcal{L}\left(\cos(ax) H(x)\right)(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$.

et $\mathcal{L}\left(\sin(ax) H(x)\right)(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$.

Theorème : Relation entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$;

Soit f une fonction causale tq $f \in L^1$

$y \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yt} f(t)\,dt.$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2i\pi yt} f(t)\,dt.$$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \qquad p = 2i\pi y.$$

pour $y = \frac{-ip}{2\pi}$, on a :

$$\mathcal{F}f\left(\frac{p}{2\pi}\right) = \mathcal{L}(f)(-ip)$$

on encore :

$$\mathcal{F}f(y) = \mathcal{L}(f)(2i\pi y).$$

Remarque :

$g(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ est dite l'image de f par $\mathcal{L}$

f est appelé l'origine de $g(p)$ par $\mathcal{L}$.

Exemple :

on a $\mathcal{L}\left(\cos(ax) H(x)\right)(p) = \frac{p}{p^2+a^2} = g(p)$

on dit que $\frac{p}{p^2+a^2}$ est l'image par la transformation de la place de $\cos(ax) H(x)$

et que $\cos(ax) H(x)$ est l'origine de $g(p)$ par $\mathcal{L}$ encore :

$$\mathcal{L}^{-1}(g)(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)(x)$$

$$= \cos(ax) H(x).$$

Thm :

Si f et g deux fct causale dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p)$$

Preuve :

on a d'après la définition du produit de convolution :

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \int_0^{+\infty} (f*g)(t) e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(t-y) dy \right) e^{-pt} dt$$

(convertir du théorème de Fubini).

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(y)\, g(t-y)\, e^{-pt} dy\, dt.$$

Soit le changement de variable $x = t - y$.

$$dx = dt.$$

$$t = x + y.$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(y)\, g(x)\, e^{-p(x+y)} dx\, dy.$$

$$= \int_0^{+\infty} f(y) e^{-py} dy \int_0^{+\infty} g(x) e^{-px} dx.$$

$$= \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p).$$

Propriétés : Soit f une fct causale dans $L^1(\mathbb{R})$.

1) $\mathcal{L}(f(x-a))(p) = \mathcal{L}(Z_a f)(p)$; a>0

avec $Z_a f(x) = f(x-a)$

$$= \int_0^{+\infty} Z_a f(x) e^{-px} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x-a) e^{-px} dx.$$

Soit $y = x - a \Rightarrow$

$$= \int_{-a}^{+\infty} f(y) e^{-p(y+a)} dy$$

$$= e^{-pa} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-py} dy$$

$$= e^{-pa} \mathcal{L}(f)(p)$$

2) $\mathcal{L}(e^{ax} f(x))(p) = \int_0^{+\infty} e^{ax} f(x) e^{-px} dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x(p-a)} f(x) dx$$

$$= \mathcal{L}(f)(p-a).$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mathcal{L}(f(ax))(p) = \int_0^{+\infty} f(ax) e^{-px} dx.$$

Soit le changement de variables

$y = ax \Rightarrow x = \frac{y}{a}$, $dx = \frac{dy}{a}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(ax))(p) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\frac{p}{a}y} dy$$

$$= \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{y}{a}\right).$$

Théorème :

① Soit f une fct causale dans $L^1(\mathbb{R})$ tq $f \in C^n(\mathbb{R})$ alors on a $\mathcal{L}(f^n)(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$

avec $f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

② - Soit f une fct causale dans $L^1(\mathbb{R})$ tq $t \mapsto t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ alors.

$$\mathcal{L}^{(n)}(f)(p) = \frac{d^n}{dp^n} (\mathcal{L}(f))(p).$$

$$= (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(p).$$

Exercice :

Calculer la transformée de Laplace de $f_1(x) = (x^2+1)H(x)$,

$f_2(x) = x^3 \cos(x) H(x)$

$f_3(x) = e^{-x} \sin^2 x\, H(x)$, $f_4(x) = e^{-2x}(1+x^3)H(x)$

$f_5(x) = (3\,\mathrm{ch}(5x) - 4\,\mathrm{sh}(|x|))H(x)$

avec $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Correction

1) $\mathcal{L}(f_1)(p) = \mathcal{L}(x^2 H(x))(p) + \mathcal{L}(H)(p)$.

$= \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p}$.

2) $\mathcal{L}(f_2)(p) = \mathcal{L}(x^3 \cos(x) H(x))(p)$

$= (-1)^3 \mathcal{L}^{(3)}(\cos(x) H(x))(p)$.

$= -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(3)}$.

3) $\mathcal{L}(e^{-x} \sin^2 x \, H(x))(p)$.

$= \mathcal{L}(\sin^2(x) H(x))(p+1)$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

$2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$.

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(e^{-x} \sin^2 x H(x))(p)$

$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(1 - \cos(2x)) H(x))(p+1)$.

$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(H)(p+1) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(2x) H(x))(p+1)$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2+4}$.

$\mathcal{L}(f_4)(p) = \mathcal{L}((1+x^3) H(x))(p+2)$.

$= \mathcal{L}(H)(p+2) + \mathcal{L}(x^3 H(x))(p+2)$.

$= \frac{1}{p+2} + \frac{6}{(p+2)^4}$. (3)

$\mathcal{L}(f_5)(p) = \mathcal{L}\left(-\frac{1}{2} e^{5x} H(x) + \frac{1}{2} e^{-5x} H(x)\right)(p)$.

$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(H)(p-5) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(H)(p+5)$.

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{p-5} + \frac{1}{2}\frac{1}{5+p}$. (2).

$\Rightarrow$ transformée de la place inverse : $\mathcal{L}^{-1}$.

Soit une fct causale $f \in L^1(\mathbb{R})$

et soit $g(p) = \mathcal{L}(f)(p)$.

g est appelée la transformation de de fct f et f est appelée la transformée de la place inverse de g ou en core elle est notée par:

f est dite l'origine de g par $\mathcal{L}$ elle est est notée par:

$f(x) = \mathcal{L}^{-1} g(x)$.

Exemple.

on $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)(x) = x H(x)$.

Exercice:

Cherche l'origine par $\mathcal{L}$ des fonctions suivant.

$g_1(p) = \frac{6p-4}{p^2-4p+20}$.

$g_2(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-2)^4}$.

$g_3(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p+2)}$.

Transformation de Laplace

Nadia Sraieb

École Nationale d'Ingénieur de Gabes
Département GCR-GCP
Omar Ibn Khattab Street 6029 Gabes, Tunisia
e-mail: nadia.sraieb@fsg.rnu.tn/sraieb.nadia@yahoo.fr

Keywords: *Transformation de Laplace*

1 Introduction

On identifira au sous espace vectoriel $L^1_{loc}(\mathbb{R})$(l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$), nulles sur $\mathbb{R}^*_-$.
Dans ce cours, on considère que les fonctions sont nulles pour $x < 0$. Ce type de fonction sont appelées des **fonctions causale**.
Et pour les fonctions f non nulle sur $\mathbb{R}_-$, il suffit de considrer $g(x) = H(x)g(x)$, H étant la fonction de Heaviside, pour obtenir la fonction correspondante.

Definition 1.1. *Soit f une fonction à variable réelle ou complexe, la transformation de Laplace bilatérale de f,lorsqu'elle existe, est la fonction à variable réelle ou complexe p définit par l'intégrale:*

$$\mathcal{L}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Remarque 1.1. *f est appelé l'origine et $\mathcal{L}$ est l'image de la fonction f.*

Definition 1.2. *La transformation de Laplace unilatérale d'une fonction causale f est la fonction $\mathcal{L}f$ de la variable réelle ou complexe p définie par*

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{1.1}$$

Remarque 1.2. *1. On remarque dans le cas de la transformation de Laplace unilatérale, seule la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ intervient dans la définition. On peut toujours rendre une fonction causale, c'est en la multipliant par la fonction Heaviside.*

2. Pour que $\mathcal{L}f$ existe, il faut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}dt$ soit convergente

Exemple
Vérifions que la fonction $f(t) = \frac{1}{t}H(t)$ n'admet pas de transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}e^{-pt}dt = \int_0^1 \frac{1}{t}e^{-pt}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}e^{-pt}dt$$

Nadia Sraieb

Sur l'intervalle $[0,1]$, $e^{-pt} \geq e^{-p}$, si p est réel positif, donc

$$\int_0^1 \frac{1}{t} e^{-pt} dt \geq e^{-p} \int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

Cette dernière intégrale diverge et ainsi $\mathcal{L}f(p)$ n'existe pas.

Definition 1.3. *On dit que f est à croissance exponentielle d'ordre p s'il existe $A, B > 0$ tels que,*

$$\forall x \geq A, |f(t)| \leq Be^{pt}.$$

Exemple • Les fonctions polynômes et les fonctions de la forme $f(t) = ae^{at}$ sont d'ordre exponentielles.
• la fonction $f(t) = e^{t^2}$ n'est pas d'ordre exponentielle.
en effet : on a $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$e^{at} e^{t^2} = e^{t^2+at}$$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t^2+at} = +\infty$

Théorème 1.1. *si f est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'ordre exponentielle alors elle admet une transformée de Laplace bien définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ telle que $\Re e(p) > a$ (où a vérifie $|f(t)| \leq Ce^{at}$, $c > 0$ et $\forall\, t \geq t_0$.).*

Preuve Soit $t_0 > 0$. Il existe $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$ tel que l'on a

$$|f(t)| \leq Ce^{at}, \ \forall\, t \geq t_0.$$

Parsuite, pour tout $t \geq t_0$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(t)e^{-st}| &= |f(t)|e^{-\Re e(s)t} \\ &\leq Ce^{-(\Re e(s)-a)t}. \end{aligned}$$

D'où la convergence de l'intégrale $\int_{t_0}^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt$, $\forall\, \Re e(s) > a$. C e qui entraine la convergence de l'intégrale $\int_{t_0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$, $\forall\, \Re e(s) > a$.

Or puisque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ alors $\int_0^{t_0} f(t)e^{-st}dt < +\infty$.
Donc,

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}dt + \int_{t_0}^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt < +\infty, \ \forall\, \Re e(s) > a.$$

Ce qui fallait démontrer.

Puisque l'existance de la transformation de Laplace exige que

$$t \mapsto e^{-xt}|f(t)| \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

on introduira, alors la notion d'abscisse de convergence absolue ou appelée encore l'abscisse de sommabilité.

Definition 1.4. *On appelle abscisse de convergence absolue ou abscisse de sommabilité, le réel x_0 telle que*
$x_0 = \inf\left\{x \in \mathbb{R}_+ : \ e^{-xt}|f(t)| \in L^1(\mathbb{R}^+)\right\}$.

Ici, on remarque bien la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ pour $\mathfrak{Re}(s) > x_0$ alors que cette convergence n'est pas vérifié lorsque $\mathfrak{Re}(s) < x_0$.

Exemple La fonction échelon-unité ou Heaviside, définie par

$$H(x) = 1, \ x \geq 0; \ \ H(x) = 0, \ t < 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(p) &= \int_0^{\infty} H(x)e^{-px}dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \end{aligned}$$

pour que $\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$ soit convergente il faux que $\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0$ ce qui implique que $\lim_{t\to+\infty} |e^{-pt}| = 0$. Comme $p \in \mathbb{C}$, alors $|e^{-pt}| = e^{-Rel(p)t}$. Donc

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-Rel(p)t} = 0 \ \text{ si et seulement si } \ Rel(p) > 0.$$

Par suite $\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$ est convergente si et seulement si $Rel(p) > 0$. Alors l'abscisse de convergence absolue de la fonction Heaviside H est $p_0 = 0$. Dans la suite un calcul simple donne

$$\mathcal{L}H(p) = \frac{1}{p}, \ \ \forall p \in \mathbb{C}, \ \ Rel(p) > 0.$$

Exemple
Posons $f(t) = e^{it}$, on a

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{it}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-p)t}dt$$

avec

$$\lim_{t\to+\infty} |e^{(i-p)t}| = \lim_{t\to+\infty} e^{-Relp} = 0 \Leftrightarrow Relp > 0.$$

Ainsi

$$\mathcal{L}(e^{it})(p) = \frac{1}{p-i}, \ \ \forall \ Relp > 0$$

Il sera simple de vérifier la relation entre les deux transformations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$, donnée dans ce théorème.

Théorème 1.2. *(La relation entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$)*
Soit f une fonction causale, telle que: si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, alors $\mathcal{F}f(y) = \mathcal{L}f(iy2\pi)$, ou encore $\mathcal{F}f(\frac{y}{2\pi}) = \mathcal{L}f(iy)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

La preuve est évidente.

2 Quelques exemples

1. **Transformée de Laplace de l'échelon unité** $(t \mapsto H(t))$ La transformée de Laplace de l'échelon unité est définie pour $p \in \mathbb{C}$ avec $Relp > 0$ et on a

$$\mathcal{L}H(p) = \mathcal{L}(H(t))(p) = \frac{1}{p}$$

2. **Transformée de Laplace de la fonction rampe** $t \mapsto t \times H(t)$ La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour pour $p \in \mathbb{C}$ avec $Relp > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2}$$

3. **Transformée de Laplace de la fonction** $t \mapsto t^n \times H(t)$, $n \in \mathbb{N}$ La transformée de Laplace de la fonction $(t \mapsto t^n \times H(t))$ est définie pour $p \in \mathbb{C}$ avec $Relp > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(t^n \times H(t))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

preuve Calculons la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \times H(t)$ intégrant par parties:

$$u = t^n, \quad dv = e^{-pt}dt, \quad du = nt^{n-1}dt, \quad v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n \times H(t))(p) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt \\ &= \Big[-\frac{1}{p}e^{-pt}t^n\Big]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt\end{aligned}$$

Les valeurs de la première intégrale sont nulles à chaque borne, la valeur de la seconde est celle de la transformée de $t \mapsto t^{n-1} \times H(t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n \times H(t))(p) = \frac{n}{p}\mathcal{L}(t^{n-1} \times \mathcal{U}(t))(p) &= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\mathcal{L}(t^{n-2} \times H(t))(p) \\ &= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\ldots\frac{1}{p}\mathcal{L}(t^0 \times H(t))(p) \\ &= \frac{n!}{p^n}\mathcal{L}(H(t))(p)\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{1}{p}\mathcal{L}(t^0 \times H(t))(p) = \mathcal{L}(H(t))(p) = \frac{1}{p}$$

comme on peut immédiatement le constater.

4. **Transformée de Laplace de la fonction** $t \mapsto e^{at} \times H(t)$, $a \in \mathbb{C}$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{at} \times H(t)$ est définie pour $p \in \mathbb{C}$, $Rel(p) > Rel(a)$ et on a

$$\mathcal{L}(e^{at} \times H(t))(p) = \frac{1}{p-a}$$

preuve Calculons la transformée de Laplace de l'exponentielle $f(t) = e^{at} \times H(t)$

$$\mathcal{L}(e^{at} \times \mathcal{U}(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} dt = \Big[\frac{1}{a-p} e^{(a-p)t}\Big]_0^{+\infty}$$

avec

$$\lim_{p\to+\infty} \Big|\frac{1}{a-p} e^{(a-p)t}\Big| = \frac{1}{|a-p|} \lim_{p\to+\infty} e^{(a-Relp)t}$$

Cette dernière limite est nulle si $Relp > a$. Ainsi, la valeur en la borne supérieure n'existe que si $Relp > a$ et vaut alors 0. Alors que la valeur en la borne inférieure vaut $\frac{1}{a-p}$. Ainsi

$$\mathcal{L}(e^{at} \times H(t))(p) = \frac{1}{p-a}, \qquad \text{définie si} \quad Relp > a$$

5. **Transformée de Laplace de la fonction** $t \mapsto \sin t \times H(t)$ **:**

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin t \times H(t)$ est définie pour $p \in \mathbb{C}$, $Rel(p) > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

preuve Calculons $\mathcal{L}(\sin t \times H(t))$ en intégrant aussi par parties :

$$u = \sin t, \quad dv = e^{-pt} dt, \quad du = \cos t dt, \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt}$$

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \int_0^{+\infty} \sin t e^{-pt} dt = \Big[-\frac{1}{p} e^{-pt} \sin t\Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt$$

Les valeurs de la première intégrale sont nulles à chaque borne, la valeur de la seconde est celle de la transformée de $\sin t H(t)$. Ainsi

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(\cos t \times H(t))(p)$$

En intégrant une nouvelle fois par parties, on trouve que

$$\mathcal{L}(\cos t \times H(t))(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p)$$

et

finalement

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p)$$

D'où, en résolvant l'équation

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

On établit de même

$$\mathcal{L}(\cos t \times H(t))(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

3 Propriétés de la transformation de Laplace

Proposition 3.1. *Soit f et g deux fonctions causales admettant deux transformation de Laplace respectives $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ et d'indice de sommabilité respectifs x_0 et y_0, alors ona.*

1. *Linéarité :*
   - *la fonction $f+g$ admet une transformation de Laplace telle que*
   $$\mathcal{L}(f+g)(p) = \mathcal{L}f(p) + \mathcal{L}g(p).$$
   - *Pour tout α appartenant à $\mathbb{R}$ (ou à $\in \mathbb{C}$), on a*
   $$\mathcal{L}(\alpha \times f)(p) = \alpha \times \mathcal{L}f(p)$$
2. *Injectivité :*
   $$si \ \ \mathcal{L}f = \mathcal{L}g \ \ alors \ \ f = g \ p.p.$$
3. $$\lim_{|p|\to+\infty} \mathcal{L}f(p) = 0, \ \ \forall\, p \in \mathbb{C} \ tel \ \ que \ \mathcal{R}ep > x_0.$$

Exemple

1. La transformée de Laplace de la fonction définie par
   $$f(t) = (3t+4)H(t)$$
   est donnée par
   $$\begin{aligned}\mathcal{L}((3t+4)H(t))(p) &= 3\mathcal{L}(tH(t))(p) + 4\mathcal{L}(H(t))g(p)\\ &= \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p}\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{it})(p) &= \mathcal{L}(\cos t)(p) + i\mathcal{L}(\sin t)(p)\\ &= \frac{1}{p-i}\\ &= \frac{p}{p^2+1} + i\frac{1}{p^2+1}\end{aligned}$$
   Alors
   $$\mathcal{L}(\cos t)(p) = \frac{p}{p^2+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\sin t)(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

Proposition 3.2. *Soit f une fonction causale admettant une transformée de Laplace notée $\mathcal{L}f(p)$ ayant p_0 comme abscisse de convergence absolue, alors on a*

1. ***Phénomène d'amortissement:*** *pour $a \in \mathbb{R}$ la fonction $e^{at}f(t)$ admet une transformée de laplace, son abscisse de convergence absolue est $p_0 + a$ et on a*
   $$\mathcal{L}(e^{at}f(t)H(t))(p) = \mathcal{L}f(p-a), \quad \forall p > p_0 + a.$$

$\mathcal{L}(e^{ax}f(x))(p)$
$= \mathcal{L}(f)(p-a)$
preuve:
$e^{ax}f(x)e^{-px}\,dx.$

$\int_0^{+\infty} e^{-x(-a+p)} f(x)\,dx.$
$= \mathcal{L}(f)(p-a).$

2. ***Changements d'échelles*** *: pour tout $a > 0$, la fonction $f(at)$ admet une transformée de laplace d'abscisse de convergence absolue est ap_0 et on a*

$$\mathcal{L}(f(at)H(t))(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}f(\frac{p}{a}), \quad \forall p > ap_0.$$

3. ***Phénomène de retatd:*** *Soit $a > 0$, la fonction*

$$\begin{aligned} f_a(t) &= f(t-a)H(t-a) \\ &= \begin{cases} f(t-a) \ \ si \ \ t > a, \\ 0 \ \ sinon \end{cases} \end{aligned}$$

admet une transformée de Laplace son abscisse de convergence absolue est p_0 et on a

$$\mathcal{L}(f_a(t))(p) = e^{-ap}\mathcal{L}f(p), \quad \forall p > p_0.$$

Remarque 3.1. *Pour $a > 0$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$,* $\quad H(at) = H(t)$

preuve

1. on a

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)H(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-a)t}dt = \mathcal{L}f(p-a).$$

2. Par un simple changement de variable $u = at$, on obtient le résultat.

3. On a $\mathcal{L}(f_a(t))(p) = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt$
   Posons $u = t - a, du = dt$. L'intégrale devient

$$\int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+a)}du = e^{-pa}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-pa}\mathcal{L}f(p).$$

Exemple

1. $\mathcal{L}(e^{2t}t^3H(t))(p) = \mathcal{L}(t^3)(p-2) = \frac{6}{(p-2)^4}$

2. $\mathcal{L}(e^{-3t}\sin tH(t))(p) = \mathcal{L}(\sin t)(p+3) = \frac{1}{(p+3)^2+1}$

3. pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\cos(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(\cos(t))(\frac{p}{\alpha}) = \frac{p}{p^2+\alpha^2}, \\ \mathcal{L}(\sin(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(\sin(t))(\frac{p}{\alpha}) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \end{cases}$$

4. Transformée de Laplace de $f(t) = (t-1)^2$ et $g(t) = (t-1)^2, t \geq 1$:
   Remarquons ici qu'on peut appliquer la proposition précédante (cas de phénomène

de retard) uniquement sur la fonction g et non pas sur f car la fonction f elle retardé par 1 mais elle commence à partie de zéro et non pas de 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)H(t))(p) &= \mathcal{L}(t^2-2t+1)(p)\\ &= \mathcal{L}(t^2)(p)-2\mathcal{L}(t)(p)+\mathcal{L}(H(t))(p)\\ &= \frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((t-1)^2H(t-1))(p) &= e^{-p}\mathcal{L}(t^2)(p)\\ &= \frac{2e^{-p}}{p^3}\end{aligned}$$

Exemple Cherchons la transformée de la fonction

$$f(t)=\sin(2t-3)H(t-\frac{3}{2})$$

la fonction

$$f(t)=\sin(2(t-\frac{3}{2}))H(t-\frac{3}{2})=g(t-\frac{3}{2})$$

avec $g(t)=\sin(2t)H(t)$
Alors,

$$\mathcal{L}(f(t))(p)=\mathcal{L}(g(t-\frac{3}{2}))(p)=e^{-\frac{3}{2}p}\mathcal{L}(g(t))(p)=\frac{2e^{-\frac{3}{2}p}}{p^2+4}$$

Exemple Calculer la transformée de la fonction

$$g(t)=tH(t-1)$$

La fonction g est égale à une fonction f retardée de 1: $g(t)=f(t-1)$.
Donc la fonction f est égale à g avancée de 1: $f(t)=g(t+1)$.

$$f(t)=g(t+1)=(t+1)H(t)$$

Alors

$$\mathcal{L}(g(t))(p)=e^{-p}\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\Big)$$

Exemple Calculer la transformée de la fonction

$$f(t)=\sin tH(t-\frac{\pi}{2})$$

La fonction

$$g(t)=f(t+\frac{\pi}{2})=\sin(t+\frac{\pi}{2})H(t)=\cos tH(t)$$

est retardée de $\frac{\pi}{2}$. Le retard implique

$$\mathcal{L}(g(t))(p)=e^{-\frac{\pi}{2}p}\frac{p}{p^2+1}$$

Transformée de Laplace Exercices d'entraînement

1) Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}[\cos(t)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)]$ b) $\mathscr{L}[(5t)^2e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)]$

c) $\mathscr{L}[(\cos(2t)-\sin(t))\,e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)]$ d) $\mathscr{L}[(t^2+t+1)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)]$

2) Calculer les originaux suivants :

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{p+2}-\dfrac{1}{p^3}\right]$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(p+3)^2}\right]$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}\right]$

d) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-p}{p^2+4p+6}\right]$

e) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{(p+1)^2}\right]$

f) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2p+3}{2p^2+4p+5}\right]$

3) Équations différentielles

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les équations suivantes :

a) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0$ avec : $x(0)=1$ et $x'(0)=0$

b) $x''(t)+6x'(t)+9x(t)=e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=0$

c) $x''(t)-x(t)=(3e^{-2t}+t^2+1)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=0$

d) $x''(t)-4x(t)=(3e^{-t}-t^2)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=1$

e) $x''(t)+x(t)=e^t\cos(t)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=0$

f) $x''(t)+x(t)=\mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-1)$ avec : $x(0)=2$ et $x'(0)=0$

Transformée de Laplace Exercices Simples

1) Laplace

Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)\right]$

b) $\mathscr{L}\left[\left(t+2\right)\mathscr{U}(t)+\left(t+3\right)\mathscr{U}(t-2)\right]$

c) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

2) Laplace inverse

Calculer les originaux suivants :

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{(p+5)^2}\right]$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p-1}{(p^2+2p+5)}\right]$

3) Équations différentielles

Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $x'(t)+x(t)=t\,\mathscr{U}(t)-t\,\mathscr{U}(t-1)$ condition initiale : $x(0)=0$

b) $x''(t)+x'(t)=\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

c) $x''(t)+4x(t)=2\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

d) $x''(t)+5x'(t)+4x(t)=e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

e) $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

LaTeX 2ε

Table des transformées de Laplace

1	$f(t)$	$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$
2	$U(t)$	$\frac{1}{p}$
3	$t^n U(t), n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^\alpha\, U(t), \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
5	$e^{at}U(t)$	$\frac{1}{p-a}$
6	$\sin(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
7	$\cos(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
8	$\mathrm{sh}(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
9	$\mathrm{ch}(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
10	**Propriétés**	
10	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
11	$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
12	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
13	$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{F(p)}{p}$
14	$f'(t)$	$pF(p)-f(0^+)$
15	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$
16	$t^n f(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
18	f de période T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$
19	$(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds$	$F(p)G(p)$
20	$Si \lim_{t\to 0 \text{ ou} +\infty} f(t)$ existe $\Rightarrow$	$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$ $\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to+\infty} pF(p)$

Exercices Simples (Solutions)

1) Laplace

Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)\right]$

$$f(t)=\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t) = t^2\,\mathscr{U}(t)+t\,\mathscr{U}(t)-e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)$$

$$F(p)=\boxed{\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+3}}$$

b) $\mathscr{L}\left[\left(t+2\right)\mathscr{U}(t)+\left(t+3\right)\mathscr{U}(t-2)\right]$

$$f(t)=(t+2)\,\mathscr{U}(t)+(t+3)\,\mathscr{U}(t-2)=\left(t+2\right)\mathscr{U}(t)+\left((t-2)+5\right)\mathscr{U}(t-2)$$

$$\mathscr{L}\left[(t+5)\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p} \qquad \mathscr{L}\left[(t+2)\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}=\frac{2p+1}{p^2}$$

$$\mathscr{L}\left[\left((t-2)+5\right)\mathscr{U}(t-2)\right]=\left(\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}\right)e^{-2p}$$

$$F(p)=\boxed{\frac{2p+1}{p^2}+\left(\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}\right)e^{-2p}}$$

c) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

$$f(t)=\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$$

$$\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)\mathscr{U}(t)\right]=\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{p^2+p+2}{p^3}$$

$$\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{(p+2)^2+(p+2)+2}{(p+2)^3}$$

$$F(t)=\boxed{\frac{p^2+5p+8}{(p+2)^3}}$$

2) Laplace inverse

Calculer les originaux suivants :

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}=\frac{2}{p+4}+\frac{-1}{p+3}$$

$$f(t)=\boxed{\left(2\,e^{-4t}-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{(p+5)^2}\right]$

$$F(p) = \frac{3}{(p+5)^2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{p^2}\right] = 3\,t\,\mathscr{U}(t)$$

$$f(t) = \boxed{3\,t\,e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)}$$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p-1}{(p^2+2p+5)}\right]$

$$F(p) = \frac{p-1}{(p^2+2p+5)} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2^2} - \frac{2}{p^2+2^2}\right] = \Big(\cos(2t) - \sin(2t)\Big)\,\mathscr{U}(t)$$

$$f(t) = \boxed{\Big(\cos(2t) - \sin(2t)\Big)\,e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

3) Équations différentielles

a) $x'(t) + x(t) = t\,\mathscr{U}(t) - t\,\mathscr{U}(t-1)$ condition initiale : $x(0) = 0$

$$x'(t) + x(t) = t\,\mathscr{U}(t) - \big((t-1)+1\big)\,\mathscr{U}(t-1)$$

$$(p\,X(p) - 0) + X(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p}$$

$$(p+1)X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{p+1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} - \frac{1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$\boxed{x(t) = \big(t - 1 + e^{-t}\big)\,\mathscr{U}(t) - \big(t-1\big)\,\mathscr{U}(t-1)}$$

b) $x''(t) + x'(t) = \mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

$$(p^2\,X(p) - 0 - 0) + (p\,X(p) - 0) = \frac{1}{p}$$

$$(p^2+p)X(p) = \frac{1}{p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+p)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$$

$$\boxed{x(t) = \Big(t - 1 + e^{-t}\Big)\,\mathscr{U}(t)}$$

c) $x''(t) + 4x(t) = 2\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

$$(p^2\,X(p) - 0 - 1) + 4X(p) = \frac{2}{p}$$

$$(p^2+4)X(p) = \frac{2}{p} + 1$$

$$X(p) = \frac{p+2}{p(p^2+4)} = \frac{\frac{1}{2}}{p} + \frac{-\frac{1}{2}p+1}{p^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}\right)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2t) + \sin(2t)\Big)\,\mathscr{U}(t)}$$

d) $x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

$$(p^2\,X(p) - p - 0) + 5(p\,X(p) - 1) + 4X(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$(p^2+5p+4)X(p) = \frac{1}{p+2} + p + 5$$

$$X(p) = \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p^2+5p+4)} = \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p+1)(p+4)}$$

$$= \frac{5/3}{p+1} + \frac{-1/2}{p+2} + \frac{-1/6}{p+4}$$

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{5\,e^{-t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-4t}}{6}\right)\,\mathscr{U}(t)}$$

e) $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

$$(p^2\,X(p) - p - 1) + 2(p\,X(p) - 1) + 2X(p) = 0$$

$$(p^2+2p+2)X(p) = p + 3$$

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+2}$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+1^2} + \frac{2}{(p+1)^2+1^2}$$

$$\boxed{x(t) = \Big(\cos(t) + 2\sin(t)\Big)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

Exercices d'entraînement (Solutions)

1) Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}[\cos(t)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)]$

$$\mathscr{L}[\cos(t)\,\mathscr{U}(t)] = \frac{p}{p^2+1^2}$$

$$\mathscr{L}[\cos(t)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)] = \frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+2}}$$

b) $\mathscr{L}[(5t)^2e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)]$

$$\mathscr{L}[25\,t^2\,\mathscr{U}(t)] = 25\frac{2!}{p^3}$$

$$\mathscr{L}[(5t)^2e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)] = 25\frac{2}{(p+5)^3}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{50}{(p+5)^3}}$$

c) $\mathscr{L}[(\cos(2t)-\sin(t))\,e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)]$

$$\mathscr{L}[(\cos(2t)-\sin(t))\,\mathscr{U}(t)] = \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{1}{p^2+1^2}$$

$$\mathscr{L}[(\cos(2t)-\sin(t))\,e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)] = \frac{(p+3)}{(p+3)^2+2^2} - \frac{1}{(p+3)^2+1^2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{p+3}{p^2+6p+13} - \frac{1}{p^2+6p+10}}$$

d) $\mathscr{L}[(t^2+t+1)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)]$

$$\mathscr{L}[(t^2+t+1)\,\mathscr{U}(t)] = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\mathscr{L}[(t^2+t+1)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)] = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}}$$

2) Calculer les originaux suivants :

a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{p+2}-\frac{1}{p^3}\right]$

$$\boxed{f(t)=\left(3e^{-2t}-\frac{t^2}{2}\right)\mathcal{U}(t)}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{(p+3)^2}\right]$

$$\boxed{f(t)=-2te^{-3t}\,\mathcal{U}(t)}$$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}\right]$

$$\begin{aligned}F(p)&=\frac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}=\frac{1}{p+3}-\frac{p}{p^2+3p+5}\\&=\frac{1}{p+3}-\frac{p}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}\\&=\frac{1}{p+3}-\left(\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}-\frac{\frac{3}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}\right)\\&=\frac{1}{p+3}-\left(\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}-\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{11}}\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(t)=\left(e^{-3t}-\left(\cos(\tfrac{\sqrt{11}}{2}t)-\tfrac{3}{\sqrt{11}}\sin(\tfrac{\sqrt{11}}{2}t)\right)e^{-\frac{3}{2}t}\right)\mathcal{U}(t)}$$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4p+6}\right]$

$$\begin{aligned}F(p)&=\frac{p}{p^2+4p+6}=\frac{p}{(p+2)^2+2}\\&=\frac{p+2}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{2}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}\\&=\frac{p+2}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f(t)=\left(\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right)e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)}$$

e) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p+1)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}\right]$

$$\boxed{f(t)=(-t+1)e^{-t}\,\mathcal{U}(t)}$$

f) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2p+3}{2p^2+4p+5}\right]$

$$F(p) = \frac{2p+3}{2p^2+4p+5} = \frac{p+\frac{3}{2}}{p^2+2p+\frac{5}{2}} = \frac{p+\frac{3}{2}}{(p+1)^2+\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\,\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{f(t) = \left(\cos(\tfrac{\sqrt{6}}{2}t) + \tfrac{\sqrt{6}}{6}\sin(\tfrac{\sqrt{6}}{2}t)\right)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

3) Équations différentielles

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les équations suivantes :

a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$ avec : $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$

$$(p^2X(p) - p - 0) + 3(pX(p) - 1) + 2X(p) = 0$$

$$(p^2+3p+2)X(p) = p+3$$

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{2}{p+1} + \frac{-1}{p+2}$$

$$\boxed{x(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

b) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

$$(p^2X(p) - 0 - 0) + 6(pX(p) - 0) + 9X(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$(p^2+6p+9)X(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$X(p) = \frac{1}{(p+2)(p^2+6p+9)} = \frac{1}{(p+2)(p+3)^2}$$

$$= \frac{1}{p+2} - \frac{1}{(p+3)^2} - \frac{1}{p+3}$$

$$\boxed{x(t) = \left(e^{-2t} - (t+1)e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

c) $x''(t) - x(t) = (3e^{-2t} + t^2 + 1)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

$$(p^2\,X(p) - 0 - 0) - X(p) = \frac{3}{p+2} + \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p}$$

$$(p^2 - 1)X(p) = \frac{4p^3 + 2p^2 + 2p + 4}{(p+2)p^3}$$

$$X(p) = \frac{4p^2 + 4p + 4}{(p^2-1)(p+2)p^3}$$

$$= \frac{1}{p+2} + \frac{2}{p-1} - \frac{2}{p^3} - \frac{3}{p}$$

$$\boxed{x(t) = \left(e^{-2t} + 2e^t - t^2 - 3\right)\mathscr{U}(t)}$$

d) $x''(t) - 4x(t) = (3e^{-t} - t^2)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$

$$(p^2\,X(p) - 0 - 1) - 4X(p) = \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p^3}$$

$$(p^2 - 4)X(p) = \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p^3} + 1$$

$$X(p) = \frac{p^4 + 4p^3 - 2p - 2}{(p+1)(p+2)(p-2)p^3}$$

$$= \frac{7/16}{p+2} + \frac{7/16}{p-2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1/2}{p^3} + \frac{1/8}{p}$$

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{7e^{2t}}{16} + \frac{7e^{-2t}}{16} - e^{-t} + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}\right)\mathscr{U}(t)}$$

e) $x''(t) + x(t) = e^t \cos(t)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

$$(p^2\,X(p) - 0 - 0) + X(p) = \frac{(p-1)}{(p-1)^2 + 1}$$

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{p-1}{p^2 - 2p + 2}$$

$$X(p) = \frac{p-1}{(p^2 - 2p + 2)(p^2 + 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}(p+1)}{(p-1)^2 + 1} - \frac{\frac{1}{5}(p+3)}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{2}{(p-1)^2+1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}\right)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{5}\Big(\cos(t)e^t + 2\sin(t)e^t - \cos(t) - 3\sin(t)\Big)\,\mathscr{U}(t)}$$

f) $x''(t) + x(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)$ avec : $x(0) = 2$ et $x'(0) = 0$

$$(p^2\,X(p) - 2p - 0) + X(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$$

$$(p^2+1)X(p) = \frac{1}{p} + 2p - \frac{e^{-p}}{p}$$

$$X(p) = \frac{2p^2+1}{p(p^2+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p^2+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}\right) - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right) e^{-p}$$

$$\boxed{x(t) = \Big(1 + \cos(t)\Big)\,\mathscr{U}(t) - \Big(1 - \cos(t-1)\Big)\,\mathscr{U}(t-1)}$$

LaTeX 2ε

ice :

$(t^2 + t - e^{-3t})\,H(t)\,(p)$.

$= \mathcal{L}\left((t^2 H(t))\right)(p) + \mathcal{L}\left((t\,H(t))\right)(p) - \mathcal{L}^0\left(e^{-3t} H(t)\right)(p)$

$= \frac{2!}{p^3} + \frac{1!}{p^2} - \mathcal{L}(H)(p+3)$.

$= \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+3}$.

$\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right)(p) = \mathcal{L}(f)(p+a)$

$\mathcal{L}^0\left(f(t-a)\right)(p) = e^{-ap}\,\mathcal{L}(f)(p)$

b) $-\mathcal{L}\left[(t+2)\,H(t) + (t+3)\,H(t-2)\right](p)$.

$\mathcal{L}(t\,H(t))(p) + 2\,\mathcal{L}(H)(p) + \mathcal{L}\left((t-2)\,H(t-2)\right)(p) + 2\,\mathcal{L}\left(H(t-2)\right)(p)$.

$= \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} + e^{-2p}\,\mathcal{L}(t\,H(t))(p) + 2\,e^{-2p}\,\mathcal{L}(H)(p)$.

$= \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + 2\frac{e^{-2p}}{p}$.

c) $-\mathcal{L}\left((t^2 + t + 1)\,e^{-2t} H(t)\right)(p)$.

$= \mathcal{L}\left((t^2 + t + 1)\,H(t)\right)(p+2)$.

$= \mathcal{L}\left(t^2 H(t)\right)(p+2) + \mathcal{L}(t\,H(t))(p+2) + \mathcal{L}(H)(p+2)$

$= \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$

$\mathcal{L}(x'')(p) = p^2\,\mathcal{L}(x)(p) - p\,x(0) - x'(0)$

$\mathcal{L}(x')(p) = p\,\mathcal{L}(x)(p) - x(0)$.

② Laplace inverse :

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right)$.

Soit $g(p) = \frac{p+2}{(p+3)(p+4)}$

$= \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+4}$.

$= \frac{-1}{p+3} + \frac{2}{p+4}$.

$\mathcal{L}(H)(p+3)$

$= \mathcal{L}\left((-e^{-3t} + 2e^{-4t})\,H(t)\right)(p)$.

$\mathcal{L}(g)(t) = (-e^{-3t} + 2e^{-4t})\,H(t)$.

$g(p) = \mathcal{L}(f)(p)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} g(t) = f(t)$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(p+5)^2}\right) = ?$.

Soit $g(p) = \frac{3}{(p+5)^2}$.

$= 3\,\mathcal{L}\left(t\,H(t)\right)(p+5)$

$= 3\,\mathcal{L}\left(e^{-5t}\,t\,H(t)\right)(p)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} g(t) = 3t\,e^{-5t} H(t)$.

2ème méthode :

$g(p) = 3 \cdot \frac{1}{p+5} \cdot \frac{1}{p+5}$

$= 3\,\mathcal{L}(H)(p+5)\,\mathcal{L}(H)(p+5)$

$= 3\,\mathcal{L}\left(e^{-5t} H(t)\right)(p)\,\mathcal{L}\left(e^{-5t} H(t)\right)(p)$

$\left(\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\,\mathcal{L}(g)\right.$

$= 3\,\mathcal{L}\left(e^{-5t} H(\cdot) * e^{-5t} H(\cdot)\right)(t)$

$\Rightarrow f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(t-x)\,dx$

$= 3\left(e^{-5t} H(\cdot) * e^{-5t} H(\cdot)\right)(t)$

$= \int_{\mathbb{R}} e^{-5x} H(x)\,e^{-5(t-x)} H(t-x)\,dx$.

$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$H(t-x) \begin{cases} 1 & t - x \geq 0 \\ 0 & t - x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} A & t \geq x \\ 0 & t < x \end{cases}$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{-s|t-x|} H(t-x)\,dx.$$

$$= \int_0^{t} e^{-sx} e^{-s(t-x)}\,dx.$$

$$= \int_0^{t} e^{-st}\,dx.$$

$$= e^{-st}\,[x]_0^t$$

$$= t e^{-st}.$$

donc $\mathcal{L}^{-1}(y)(t) = 3te^{-st}$.

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{p^2+2p+5}\right)$.

$$g(p) = \frac{p-1}{(p+1)^2+2^2}.$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{-2}{(p+1)^2+2^2}.$$

$$= \mathcal{L}(\cos(2t)H(t))(p+1) - \mathcal{L}(\sin(2t)H(t))(p+1)$$

$$= \mathcal{L}(e^{-t}\cos(2t) - e^{-t}\sin(2t))H(t))(p).$$

$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$.

$\mathcal{L}(f'(p)) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$.

d) $x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = e^{-2t}H(t)$.

on applique $\mathcal{L}$.

$$p^2\mathcal{L}(x)(p) - p(x(0) - x'(0)) + 5p\mathcal{L}(x)(p) - 5x(0) + 4\mathcal{L}(x)(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(p)\,[p^2+5p+4] = p + 5 + \frac{1}{p+2}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(p) = \frac{p+5}{p^2+5p+4} + \frac{1}{(p+2)(p^2+5p+4)}.$$

$$= \frac{p+5}{(p+4)(p+1)} + \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+1)}.$$

$$\frac{p+5}{(p+4)(p+1)} = \frac{a}{p+4} + \frac{b}{p+1} = \frac{-1}{3}\frac{1}{p+4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Exo.

$$\frac{1}{(p+2)(p+4)(p+1)} = \frac{a}{p+2} + \frac{b}{p+4} + \frac{c}{p+1}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(p) =$$